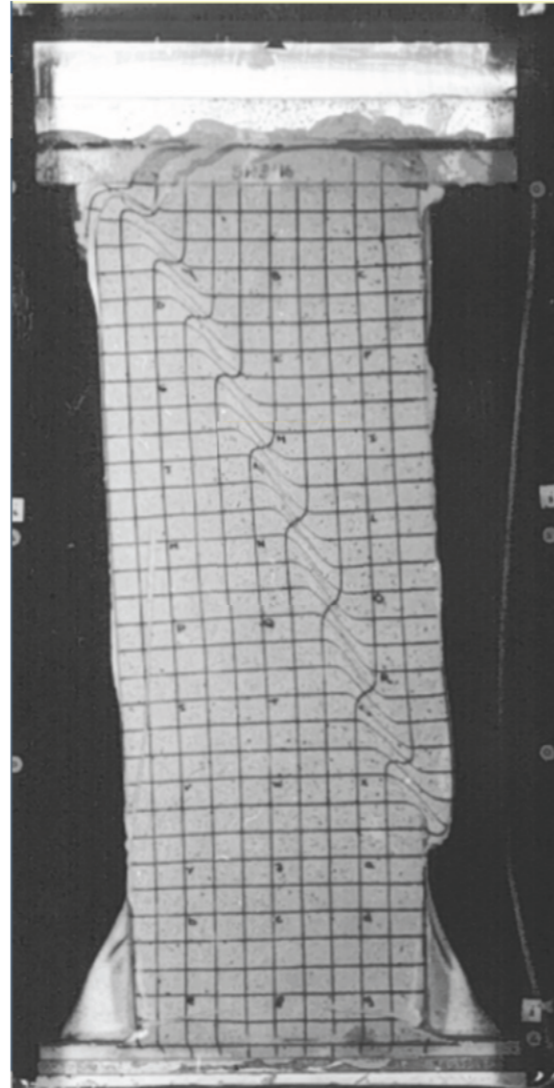


Ecole d'été
Mécanique Théorique
Quiberon

septembre 2015

Cours 3

Localisation

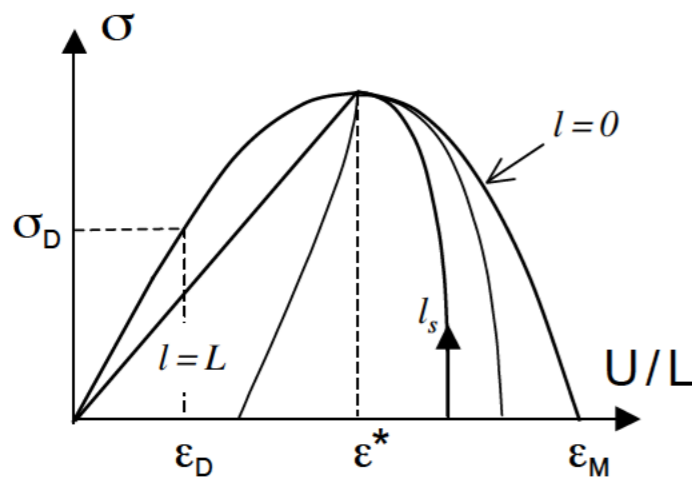


ANALYSE DES BIFURCATIONS

Le problème en vitesses

Etat fixé et on regarde l'évolution du système a partir de cet état

à partir de cet état champ de vitesses mais aussi vitesses des contraintes, etc...



exemple de réponse



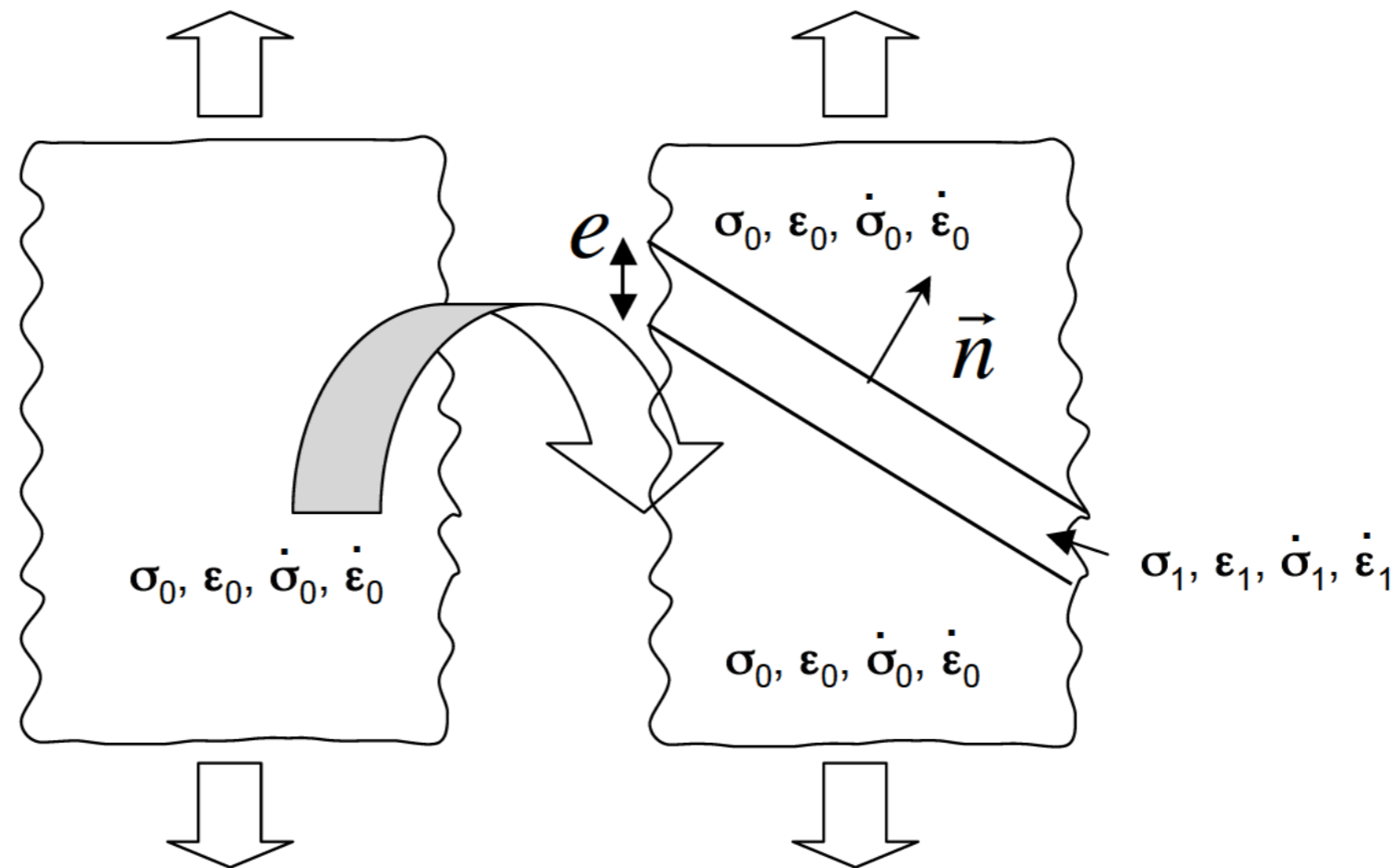
Bifurcation tangente



non tangente

Localisation

Bifurcation particulière



Loi de comportement

(en vitesses et petites déformations)
élasto-plasticité, endommagement, ...

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{cases} \mathbf{E} : \mathbf{d} & \text{si } f < 0 \text{ ou } f = 0 \text{ et } \dot{f} < 0 \\ \mathbf{H} : \mathbf{d} & \text{si } f = 0 \text{ et } \dot{f} = 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{E} - \frac{\mathbf{E} : \mathbf{P} \otimes \mathbf{Q} : \mathbf{E}}{H}$$

$$H = h + \mathbf{P} : \mathbf{E} : \mathbf{Q}$$

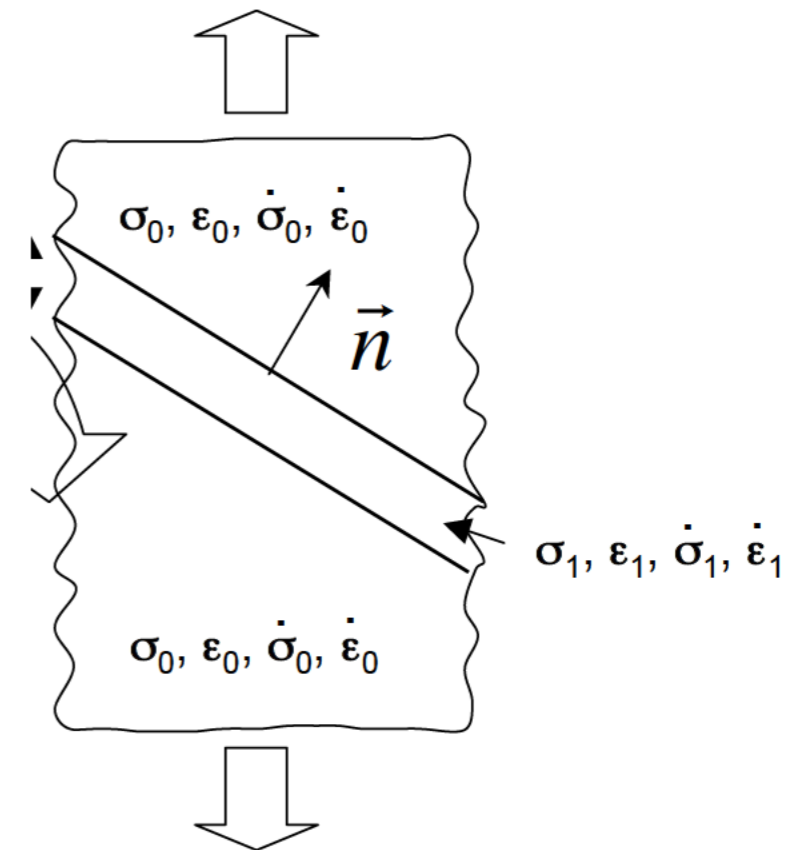
Remarque: Le module tangent n'est pas forcément symétrique

Equations du problème

Compatibilité cinématique

Equilibre mécanique

Comportement



compatibilité cinématique

Saut du gradient des vitesses

champ des vitesses est continu

Saut est nécessairement normal

Relations d'Hadamard

$$\left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right] = g_i n_j \quad d_{ij} = \frac{1}{2} (g_i n_j + g_j n_i)$$

Equilibre en vitesses

$$\dot{\sigma}_{ij}^1 n_j = \dot{\sigma}_{ij}^0 n_j \quad \text{ou} \quad \dot{\sigma}^1 \cdot \vec{n} = \dot{\sigma}^0 \cdot \vec{n}$$

$$\left[\dot{\sigma} \cdot \vec{n} \right] = 0$$

Comportement

$$\dot{\sigma}_0 = \mathbb{H} \cdot \dot{\epsilon}_0 \text{ et } \dot{\sigma}_1 = \mathbb{H} \cdot \dot{\epsilon}_1$$

$$[\dot{\sigma}] = \mathbb{H} \cdot [\dot{\epsilon}]$$

Aussi possibilités de décharges élastiques

Condition de localisation

$$[n_i H_{ijkl} n_l] g_k = 0$$

$$[\vec{n} \cdot \mathbf{H} \cdot \vec{n}] \cdot \vec{g} = 0$$

$$\det[\vec{n} \cdot \mathbf{H} \cdot \vec{n}] = 0$$

modes de localisation:
ouverture, bande de cisaillement, mode mixte

Perte d'ellipticité des équations d'équilibre (en vitesses)

Le système d'équations aux dérivées partielles est dit elliptique si il n'a aucune solution de la forme

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}e^{i\xi\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}}$$

$$\xi^2 \mathbf{g}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{H}\cdot\mathbf{n}) = 0$$

$$\text{Det}[\mathbf{n}\cdot\mathbf{H}\cdot\mathbf{n}] \neq 0 \quad \forall \mathbf{n}$$

perte d'ellipticité ξ arbitraire en plus des modes discontinus

Interprétation dynamique

Ondes d'accélération: surface de discontinuité de l'accélération

2ème relation d'Hadamard $[[\gamma_i]] = \left[\left[\frac{\partial v_i}{\partial t} \right] \right] = -cg_i$ ou $[[\boldsymbol{\gamma}]] = -c\vec{g}$

$$[[\sigma_{ij,k}]] = \alpha_{ij}n_k, \text{ et } [[\dot{\sigma}_{ij}]] = -c\alpha_{ij}$$

$$[[\dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \vec{n}]] = -\rho c [[\vec{\boldsymbol{\gamma}}]]$$

$$(n_i H_{ijkl} n_k) g_k = \rho c^2 g_k$$

$$[\vec{n} \cdot \mathbf{H} \cdot \vec{n}] \cdot \vec{g} = \rho c^2 \vec{g}$$

Ondes d'accélération stationnaires/ Discontinuité stationnaire

Décharges élastiques

$$\det[\vec{n} \cdot \mathbf{H} \cdot \vec{n}] < 0$$

$$\det[\vec{n} \cdot \mathbf{H} \cdot \vec{n}] \leq 0$$

Remarques: 1) Lorsque le module tangent est symétrique
Cohérence avec les résultats d'hier

2) Pour les modes localisé, valable aussi
lorsque le module tangent est non symétrique

Causes de la localisation

$$h + \mathbf{P} : \mathbf{E} : \mathbf{Q} = (\mathbf{Q} : \mathbf{E} \cdot \vec{n}) \cdot [\vec{n} \cdot \mathbf{E} \cdot \vec{n}]^{-1} \cdot (\vec{n} \cdot \mathbf{E} : \mathbf{P})$$

$$E_{ijkl} = \Lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + G(\delta_{il} \delta_{jk} + \delta_{ik} \delta_{jl})$$

$$[\vec{n} \cdot \mathbf{E} \cdot \vec{n}]^{-1} = \frac{1}{G} \mathbf{1} - \frac{\Lambda + G}{G(\Lambda + 2G)} \vec{n} \otimes \vec{n}$$

$$\begin{aligned} \frac{h}{2G} = \mathcal{L}(\vec{n}) &= -\mathbf{P} : \mathbf{Q} + 2(\vec{n} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} \cdot \vec{n}) - (\vec{n} \cdot \mathbf{P} \cdot \vec{n})(\vec{n} \cdot \mathbf{Q} \cdot \vec{n}) \\ &\quad - \frac{\Lambda}{\Lambda + 2G} (\vec{n} \cdot \mathbf{P} \cdot \vec{n} - \text{tr } \mathbf{P})(\vec{n} \cdot \mathbf{Q} \cdot \vec{n} - \text{tr } \mathbf{Q}) \end{aligned}$$

$$\frac{h}{2G} = -P_{\alpha\beta} Q_{\alpha\beta} - \frac{\Lambda}{\Lambda + 2G} P_{\alpha\alpha} Q_{\beta\beta}$$

$$\frac{h}{2G} = -P_{\alpha\beta}Q_{\alpha\beta} - \frac{\Lambda}{\Lambda + 2G}P_{\alpha\alpha}Q_{\beta\beta}$$

Module tangent symétrique

$$h \leq 0$$

adoucissement
nécessaire mais pas suffisant

Module tangent non symétrique

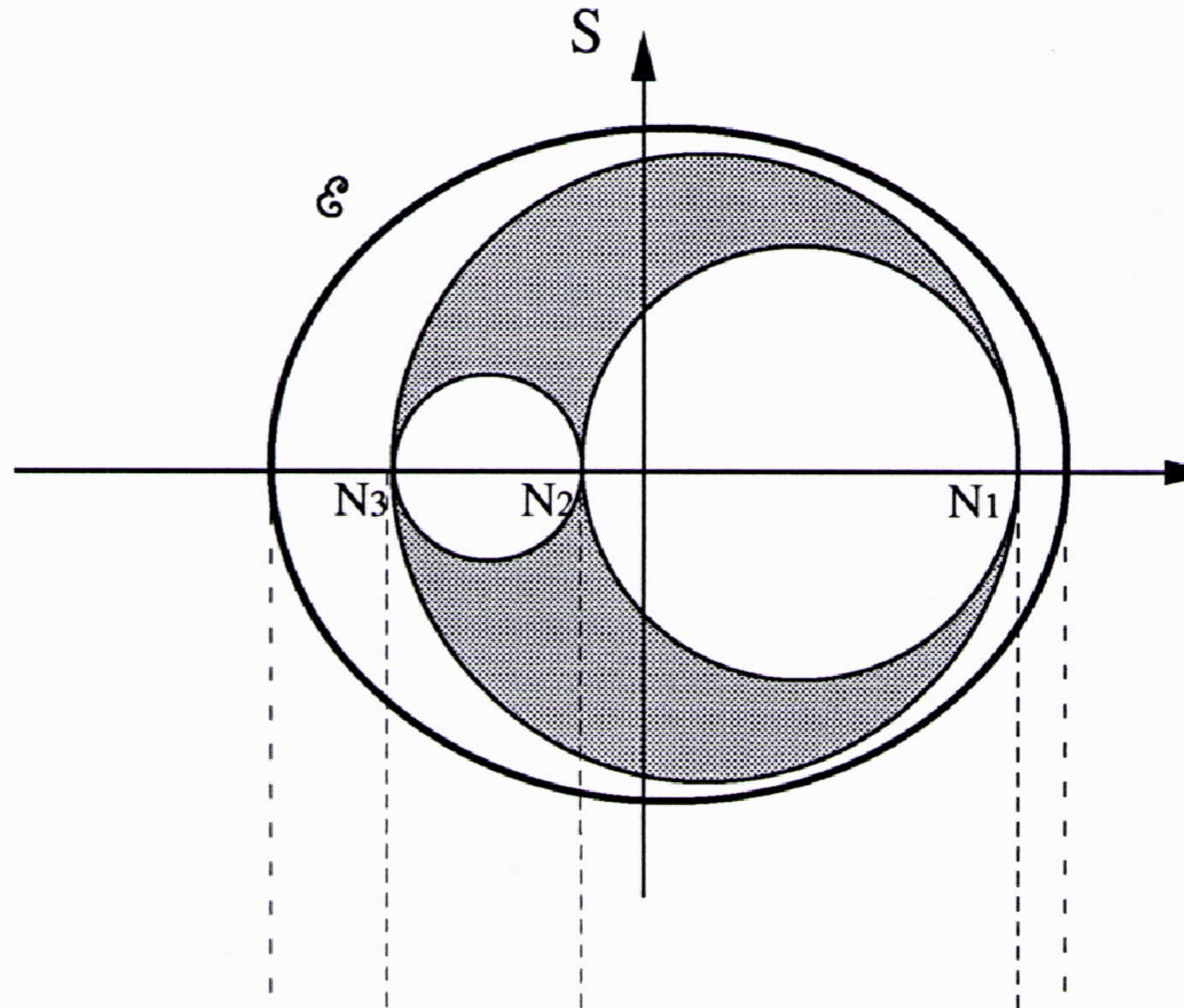
localisation possible
même en phase
durcissante

Résolution de la condition de localisation

$$\frac{h}{2G} = \mathcal{L}(\vec{n}) = -\mathbf{P} : \mathbf{Q} + 2(\vec{n} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} \cdot \vec{n}) - (\vec{n} \cdot \mathbf{P} \cdot \vec{n})(\vec{n} \cdot \mathbf{Q} \cdot \vec{n}) - \frac{\Lambda}{\Lambda + 2G}(\vec{n} \cdot \mathbf{P} \cdot \vec{n} - \text{tr } \mathbf{P})(\vec{n} \cdot \mathbf{Q} \cdot \vec{n} - \text{tr } \mathbf{Q})$$

$$\Sigma = \vec{n} \cdot \mathbf{P} \cdot \vec{n}$$

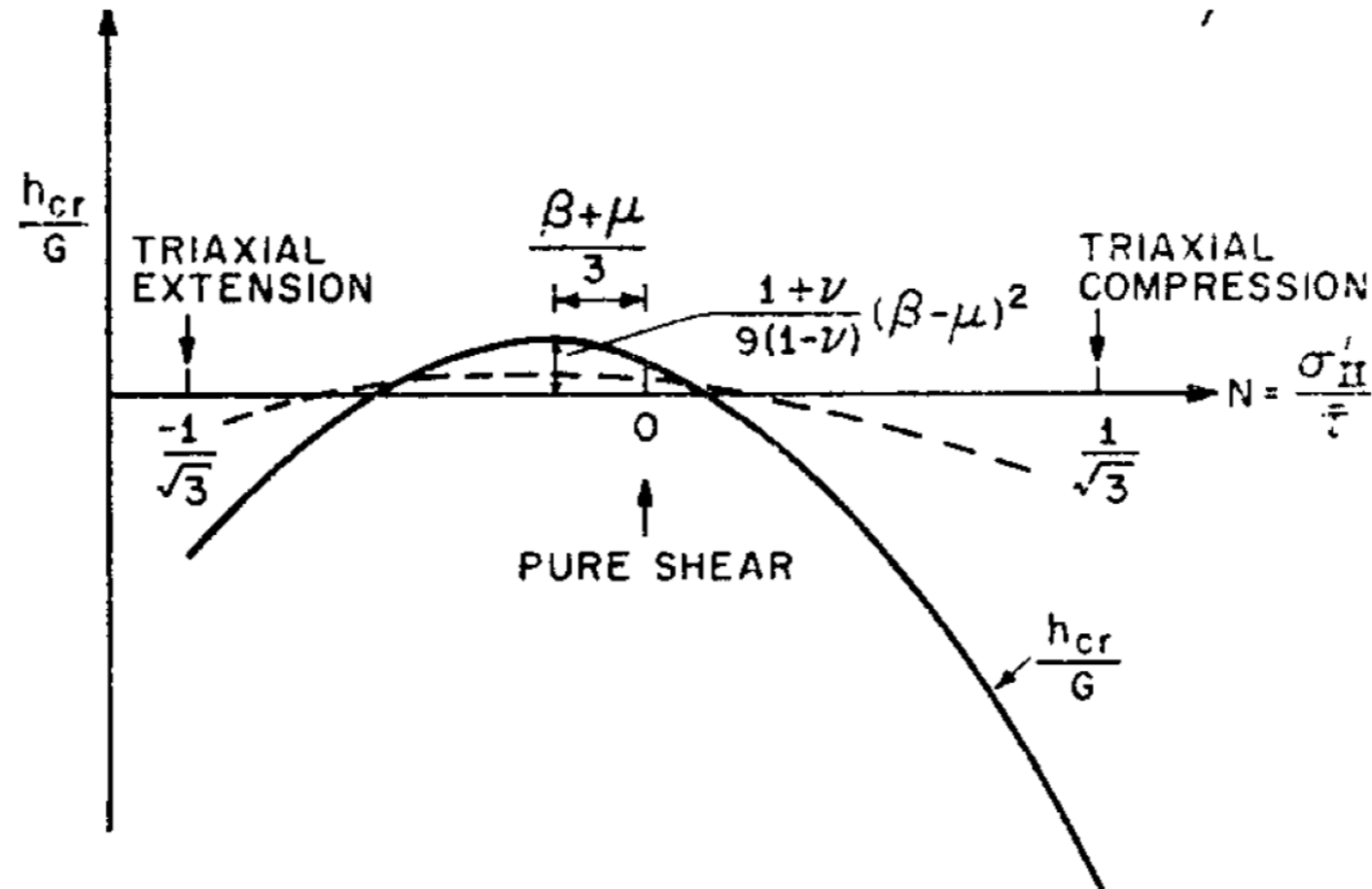
$$S = \sqrt{(\mathbf{P} \cdot \vec{n}) \cdot (\mathbf{P} \cdot \vec{n}) - (\vec{n} \cdot \mathbf{P} \cdot \vec{n})^2}$$



Exemple

$$\bar{\sigma}_{kl} = \left\{ G(\delta_{mk}\delta_{nl} + \delta_{ml}\delta_{kn}) + (K - \frac{2}{3}G)\delta_{kl}\delta_{mn} \right. \\ \left. - \frac{\left(\frac{G}{\bar{\tau}}\sigma'_{kl} + \beta K\delta_{kl}\right)\left(\frac{G}{\bar{\tau}}\sigma'_{mn} + K\mu\delta_{mn}\right)}{h + G + \mu K\beta} \right\} D_{mn}$$

$$\frac{h_{cr}}{G} = \frac{1+\nu}{9(1-\nu)}(\beta-\mu)^2 - \frac{1+\nu}{2}\left(N + \frac{\beta+\mu}{3}\right)^2,$$



Effets géométriques

(grandes transformations)

$$\llbracket \dot{F}_{ij} \rrbracket = g_i n_j \quad \text{ou} \quad \llbracket \dot{\mathbf{F}} \rrbracket = \vec{g} \otimes \vec{n}$$

$$\overset{\nabla}{\dot{\boldsymbol{\sigma}}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{w} = \mathbb{H} : \mathbf{d}$$

$$\llbracket \mathbf{d} \rrbracket = \frac{1}{2} (\vec{g} \otimes \vec{n} + \vec{n} \otimes \vec{g}) \quad \llbracket \mathbf{w} \rrbracket = \frac{1}{2} (\vec{g} \otimes \vec{n} - \vec{n} \otimes \vec{g})$$

Effets géométriques

Tenseur nominal des contraintes

Equilibre $\dot{s}_{ij}n_i = 0$

$$\dot{s}_{ij} = \hat{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \sigma_{ik} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} - (\sigma_{ik} D_{jk} - \sigma_{jk} D_{ik})$$

$$\dot{s}_{ij} = H_{ijkl} D_{kl} + \sigma_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \sigma_{ik} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} - (\sigma_{ik} D_{jk} - \sigma_{jk} D_{ik})$$

$$= L_{ijkl} \frac{\partial v_l}{\partial x_k}$$

Effets géométriques

$$n_i H_{ijkl} n_l g_k - \frac{1}{2} n_i \sigma_{ik} (g_k n_j - g_j n_k) + \frac{1}{2} n_i (g_i n_k - g_k n_i) \sigma_{kj}$$

$$\mathbf{A}(\vec{n}) = \frac{1}{2} [-\vec{n} \otimes (\vec{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) + (\vec{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n}) \mathbf{1} + (\vec{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \otimes \vec{n} - \boldsymbol{\sigma}]$$

$$\det [\vec{n} \cdot \mathbf{H} \cdot \vec{n} + \mathbf{A}(\vec{n})] = 0$$

Effets géométriques

$$\bar{\sigma}_{kl} = \left\{ G(\delta_{mk}\delta_{nl} + \delta_{ml}\delta_{kn}) + (K - \frac{2}{3}G)\delta_{kl}\delta_{mn} - \frac{\left(\frac{G}{\bar{\tau}}\sigma'_{kl} + \beta K\delta_{kl}\right)\left(\frac{G}{\bar{\tau}}\sigma'_{mn} + K\mu\delta_{mn}\right)}{h + G + \mu K\beta} \right\} D_{mn}$$

$$\frac{h_{cr}}{G} = \frac{1+\nu}{9(1-\nu)}(\beta - \mu)^2 - \frac{1+\nu}{2}\left(N + \frac{\beta + \mu}{3}\right)^2 + \frac{(4 - 3N^2)(1 + \nu)}{24(1 - \nu)}(\mu - \beta)\sin^2 2\theta_0 \frac{\bar{\tau}}{G}$$

Matériau rigide plastique

$$h\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} \right) = P_{ij} (\mathbf{Q} : \dot{\boldsymbol{\sigma}})$$

$$h [[\dot{\epsilon}_{ij}]] = P_{ij} (\mathbf{Q} : [[\dot{\boldsymbol{\sigma}}]]) = \frac{1}{2} h (g_i n_j + g_j n_i)$$

$$\mathbf{P} = \vec{n} \otimes \vec{r} + \vec{r} \otimes \vec{n}$$

$$\vec{g} = t \vec{r}$$

$$Q_{ij} \|\sigma_{ij}\| = Q_{\alpha\beta} \|\dot{\sigma}_{\alpha\beta}\|$$

module tangent symétrique $h = 0$

$$t h = Q_{\alpha\beta} [[\dot{\sigma}_{\alpha\beta}]]$$

module non symétrique h quelconque

Thermomécanique

bifurcation vs perturbation

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{H}^i : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \dot{T} \left(\mathbf{B} + \frac{\beta \mathbf{M}^i}{H^i} \right)$$

$$\text{div} \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \text{div} \left[\mathbb{H}^i : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \dot{T} \left(\mathbf{B} + \frac{\beta \mathbf{M}^i}{H^i} \right) \right] = 0$$

$$\rho C_\epsilon \dot{T} = T \mathbf{B} \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \dot{\lambda} T \chi - \text{div} \vec{q} + r$$

$$\delta \vec{u} = \tilde{\vec{u}} \exp[-i\xi \vec{n} \cdot \vec{x}] \exp(\eta t)$$

$$\delta T = \tilde{T} \exp[-i\xi \vec{n} \cdot \vec{x}] \exp(\eta t)$$

$$(\rho c \eta H^a [\vec{n} \cdot \mathbb{H}^a \cdot \vec{n}] + k \xi^2 H^i [\vec{n} \cdot \mathbb{H}^i \cdot \vec{n}]) \cdot \tilde{\vec{u}} = 0$$

$$\rho c \eta H^a \det [\vec{n} \cdot \mathbb{H}^a \cdot \vec{n}] + k \xi^2 H^i \det [\vec{n} \cdot \mathbb{H}^i \cdot \vec{n}] = 0$$

$$\det [\vec{n} \cdot \mathbb{H}^a \cdot \vec{n}] = 0$$

ou

$$\det [\vec{n} \cdot \mathbb{H}^i \cdot \vec{n}] = 0$$

Solide fini

pertinence des conditions de localisation